

**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
ПО КОНКУРСНОЙ ГРУППЕ «КИВМ и КВФ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»
ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В АСПИРАНТУРУ**

На вступительном испытании будут заданы вопросы по выпускной квалификационной работе (часть I), вопросы из раздела, соответствующего направлению будущей научно-исследовательской деятельности поступающего (часть II) и теоретические вопросы по профилю выбранной кафедры (часть III).

ЧАСТЬ I

Вопросы по выпускной квалификационной работе (магистратура или специалитет)

1. Основные положения.
2. Новизна.
3. Актуальность.

ЧАСТЬ II

Раздел «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

1. Математические основы

- 1.1. Основы теории пределов. Теорема о неявной функции. Формула Тейлора. Основные теоремы интегрального исчисления (замена переменных, метод интегрирования по частям, интегрирование рациональных функций). Числовые ряды (признаки сходимости знакопостоянных и знакопеременных рядов). Функциональные ряды. Степенные ряды. Ряды Фурье (вычисление коэффициентов).
- 1.2. Матрицы и определители n -го порядка. Координаты вектора в базисе. Преобразование координат векторов при смене базиса пространства. Операции над матрицами. Теорема о ранге матрицы. Общее решение системы линейных уравнений. Однородные системы (пространство решений, фундаментальные системы решений). Собственные векторы и собственные числа матрицы.
- 1.3. Формулы замены координат при переходе от одной декартовой системы координат к другой. Вычисление скалярных произведений, длин отрезков, углов. Линии и поверхности 1-го и 2-го порядка.
- 1.4. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения и нормальной системы. Линейное уравнение n -го порядка. Построение общего решения линейного уравнения. Неоднородные линейные системы. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
- 1.5. Основные уравнения математической физики: уравнение теплопроводности, уравнения Лапласа и Пуассона, волновое уравнение. Уравнение переноса излучения в поглощающей, излучающей и рассеивающей среде. Корректная постановка краевых задач.
- 1.6. Решение однородного уравнения теплопроводности на прямой.
- 1.7. Общие представления о некорректно поставленных задачах. Уравнения Фредгольма I-го и II-го рода. Методы регуляризации (А.М. Обухова, А.Н. Тихонова, статистической регуляризации).
- 1.8. Общая схема метода Фурье для ограниченных областей.
- 1.9. Случайные события и случайные величины. Аксиоматическое определение вероятности события. Условные вероятности. Независимость событий. Законы распределения и числовые характеристики случайных величин (дисперсия и математическое ожидание). Выборка и методы ее представления. Числовые

характеристики выборочного распределения (мода, медиана, среднее, дисперсия).
Неравенство Чебышева.

2. Общие вопросы вычислительной математики

- 2.1. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Обусловленность. Прямые методы решения (варианты метода Гаусса, метод прогонки). Итерационные методы (метод простой итерации, идея Чебышевских итерационных методов и др.).
- 2.2. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений. Методы секущих, Ньютона. Теорема о сходимости метода Ньютона. Метод простых итераций, анализ сходимости.
- 2.3. Численное дифференцирование: основные аппроксимации 1-х и 2-х производных. Ошибка аппроксимации, ошибка округления. Оптимальный шаг численного дифференцирования.
- 2.4. Численное интегрирование: квадратурные формулы Ньютона-Котеса, квадратурные формулы Гаусса. Оценка ошибки интегрирования. Правило Рунге.
- 2.5. Методы поиска экстремумов функций многих переменных. Градиентный, покоординатный и случайный спуск.
- 2.6. Численное интегрирование задачи Коши для систем ОДУ. Простейшие разностные схемы и их реализация. Ошибка аппроксимации, критерии малости шага сетки. Методы типа Рунге-Кутты, основная конструкция, алгоритм реализации, устойчивость. Теоремы о сходимости. Линейные многошаговые схемы (Адамса). Алгоритм решения, аппроксимация, сходимость.
- 2.7. Краевые задачи для систем ОДУ. Линейные краевые задачи, их решение методом фундаментальной системы. Сведения линейной краевой задачи к задачам Коши. Нелинейные краевые задачи для систем ОДУ. Метод «стрельбы», метод Ньютона.

3. Методы решения уравнений в частных производных

- 3.1. Численные методы решения уравнений гиперболического типа. Характеристическая форма уравнений. Корректная постановка краевых условий. Схемы для простейшего уравнения переноса: аппроксимация, устойчивость, монотонность.
- 3.2. Численные методы решения уравнений параболического типа. Явные и неявные схемы. Прогонка. Спектральная устойчивость. Двумерное уравнение теплопроводности. Проблема решения уравнений на верхнем слое. Метод переменных направлений в двумерных и в трехмерных задачах. Метод переменных направлений с серией параметров. Метод расщепления, схемы с исключенным промежуточным слоем.
- 3.3. Схема «крест» для уравнения Пуассона. Разностная аппроксимация уравнений Пуассона. Метод простых итераций, ошибка, невязка. Спектральный анализ сходимости простых итераций.
- 3.4. Нелинейные уравнения в частных производных, их разностная аппроксимация и реализация соответствующих схем. Схемы с нелинейностью на верхнем и нижнем слое, их реализация (метод Ньютона и прогонки).
- 3.5. Спектральный признак устойчивости и практика его применения. Принцип замороженных коэффициентов. Условие устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви. Устойчивость по начальным данным и краевым условиям.

4. Математическое моделирование в прикладных задачах

- 4.1. Понятия модели. Виды моделей. Цели моделирования. Особенности вычислительных моделей.

- 4.2. Классификации задач моделирования, математических моделей. Динамические модели сложных систем, их формализация и реализация на компьютере. Объектно-ориентированное моделирование.
- 4.3. Уравнение непрерывности. Уравнения Эйлера, Бернулли для идеальной жидкости.
- 4.4. Уравнение Навье–Стокса для вязкой жидкости. Пограничный слой.
- 4.5. Одномерное движение сжимаемого газа. Характеристики. Инварианты Римана.
- 4.6. Численные методы решения задач механики сплошной среды. Идея построения разностных схем. Консервативные методы.
- 4.7. Уравнения Максвелла. Поляризация. Поток энергии. Энергетические и фотометрические величины. Отражение, преломление и рассеяние света. Классическая теория излучения, поглощения и дисперсии. Тепловое излучение. Законы Стефана-Больцмана, Планка, формулы Вина и Релея-Джинса.
- 4.8. Взаимодействие излучения с веществом. Уравнение переноса излучения для поглощающей, излучающей и рассеивающей среды. Приближение локального термодинамического равновесия. Уравнение радиолокации. Основные характеристики сигнала обратного рассеяния (угловые и спектральные зависимости, поляризационные характеристики)

Литература

Математические основы

1. Бесов О.В. Лекции по математическому анализу: в 2 ч.: учеб. пособие. – М.: МФТИ (Ч. 1, 2004 – 328 с, Ч. 2, 2005 – 215 с.).
2. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970 г.
3. Ипатов В.М., Пыркова О.А., Седов В.Н. Дифференциальные уравнения. Методы решений. М.: Изд. МФТИ. – 2012. 140 с.
4. Уроев В.М. Уравнения математической физики. М.: ИФ "Яуза" 1998 г. – 373 с.
5. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Изд. 12-е, испр. М.: Физматлит, 2009. — 312 с.
6. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1984.
7. Боровков А.А. Математическая статистика. М.: Наука, 1984.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979 г. – 288 с.

Общие вопросы вычислительной математики

1. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: учеб. пособие. М.: Интернет-Ун-т Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006 – 523 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 5-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007 – 636 с.
3. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. – М.: Наука, 1994.

Методы решения уравнений в частных производных

1. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. – М.: Наука, 1994.
2. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука, 1988.

Математическое моделирование в прикладных задачах

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2002 – 320 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики, т. 6: Гидродинамика.
3. Чуличков А.И. Математические методы нелинейной динамики. — М.: Физматлит, 2000 — 296 с.

4. Шовенгердт Р.А. Дистанционное зондирование. Модели и методы обработки изображений. М: Техносфера, 2010 – 560 с.

ЧАСТЬ III

Вариативная часть программы вступительного испытания по кафедре информатики и вычислительной математики и кафедре вычислительной физики.

1. Дополнительные вопросы вычислительной математики

- 1.1. Жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Численные методы решения. A – устойчивые, $A(\alpha)$ – устойчивые методы, асимптотическая устойчивость.
- 1.2. Методы типа Рунге-Кутты, основная конструкция, алгоритм реализации, устойчивость. Теоремы о сходимости при разных предположениях о матрице $f(x)$. Анализ в пространстве неопределенных коэффициентов.
- 1.3. Линейные многшаговые схемы (Адамса). Схемы для продолженных систем (схемы Обрешкова). Алгоритм, сходимость, анализ в пространстве неопределенных коэффициентов.
- 1.4. Примеры методов решения уравнений гиперболического типа. Гибридные схемы. Сравнение методов в пространстве неопределенных коэффициентов.
- 1.5. Решения уравнений Пуассона методом сеток. Разностная аппроксимация уравнений Пуассона. Метод простых итераций, ошибка, невязка. Спектральный анализ сходимости простых итераций. Выбор оптимального итерационного параметра. Метод Чебышевского ускорения, анализ устойчивости, устойчивые перенумерации итерационных параметров.
- 1.6. Метод переменных направлений решения уравнения Пуассона. Спектральный анализ сходимости. Выбор оптимального итерационного параметра. Оценка числа итераций. Метод переменных направлений с серией параметров.
- 1.7. Методы поиска экстремумов функций многих переменных. Градиентный, покоординатный и случайный спуск.
- 1.8. Постановка некорректных задач. Примеры. Качественное описание подхода к их решению. Роль априорной информации. Примеры – интегральное уравнение 1-го рода, обратная задача теплопроводности.

2. Элементы дискретной математики. Дискретные алгоритмы.

- 2.1. Элементы теории алгоритмов Машины Тьюринга, машины Поста, нормальные алгоритмы Маркова. Оценки сложности алгоритмов. NP-полные задачи (алгоритмы).
- 2.2. Алгоритмы сортировки. «Быстрая сортировка», поиск делением пополам, слияние отсортированных массивов.
- 2.3. Алгоритмы на графах. Понятие графа. Особые классы графов. Поиск на графах в ширину, в глубину. Алгоритмы поиска минимального пути.

3. Параллельные вычисления

- 3.1. Многопроцессорные и распределенные системы. Издержки и выигрыш при реализации параллельных и векторных вычислений.
- 3.2. Модель передачи сообщений MPI. Модель передачи данных PVM. Две парадигмы параллельного программирования: параллелизм данных и параллелизм задач.
- 3.3. Три части параллельной программы (параллельная, последовательная, обмен данных). Синхронизация процессов, равномерность загрузки процессоров. Обзор программных средств для распараллеливания.

3.4. Классы задач, которые можно эффективно векторизовать и распараллеливать. Обработка одномерных и двумерных массивов. Научные задачи. Вычисления в узлах сеток и решеток.

4. Объектно-ориентированное программирование

- 4.1. Содержание объектно-ориентированной модели. Понятия абстракции, инкапсуляции, полиморфизма, типизации и их реализация в языках программирования.
- 4.2. Инкапсуляция. Модификация и оптимизация программ при помощи инкапсуляции.
- 4.3. Наследование. Повторное использование кода. Полиморфизм как средство обеспечения расширяемости программ. Понятие интерфейса.
- 4.4. Понятие свойств и событий (properties and events) в объектных технологиях. Агрегация. Сохраняемость объектов (persistence).
- 4.5. Диаграммы классов. Понятия и принципы объектно-ориентированного проектирования.
- 4.6. CASE – средства и их использование для автоматизации проектирования программ.

Литература

Элементы дискретной математики. Дискретные алгоритмы.

1. Ахо А., Хопкрофт Д., Ульман Д.Д. Структуры данных и алгоритмы: учеб. пособие. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2007.
2. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Том 1: Основные алгоритмы (3-е изд., 2007). Том 3: Сортировка и поиск (2-е изд.). – М.: Издательский дом «Вильямс».

Параллельные вычисления

1. Эндрюс Г.Р. Основы многопоточного, параллельного и распределённого программирования. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003 – 512 с.

Объектно-ориентированное программирование

1. Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений на C++, 2-е издание, пер. с англ., М.: Издательство Бином, СПб.: Невский диалект, 1999 г.
2. Вендров А.М. CASE-технологии. Современные методы и средства проектирования информационных систем.